Тема 9. Устойчивость линейных непрерывных систем. Алгебраические критерии устойчивости

Понятие устойчивости

Одно из основных требований к САР – быть устойчивой. САР называется устойчивой, если она, будучи выведена из равновесия каким-либо воздействием, самостоятельно возвращается к положению равновесия после прекращения этого воздействия.

В устойчивых САР отклонение регулируемой величины от равновесного значения с течением времени апериодически или колебательно стремится к нулю (рисунок. 9.1, а). В неустойчивых САР отклонение регулируемой величины от равновесного значения апериодически или колебательно возрастает (рисунок 9.1, б). Если в системе устанавливается постоянная величина отклонения или колебания носят незатухающий характер (рисунок 9.1, в), то система находится на границе устойчивости, система нейтральна.

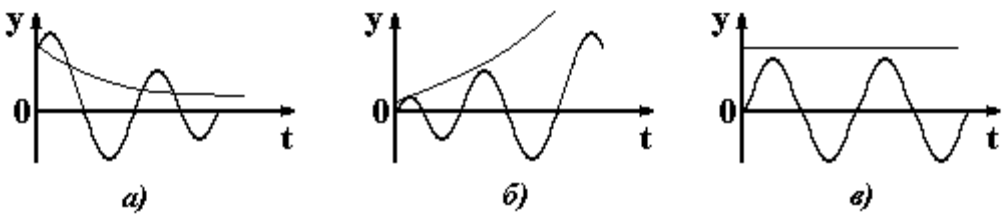

Рисунок 9.1

Анализ устойчивости по корням характеристического уравнения

В линейных САР изменение выходной переменной y(t) под влиянием воздействия x(t) является решением линейного дифференциального уравнения.

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p^1 + a_0) y(t) = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + ... + b_1 p^1 + b_0) x(t) \text{ ,} \quad (9.1)$$

где a, b – постоянные коэффициенты; $p = \frac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования.

Если в некоторый момент времени воздействие с системы снять и предоставить систему самой себе, то изменение переменной y во времени, ее свободное движение $y_{св}(t)$, будет решением уравнения

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p^1 + a_0) y_{св}(t) = 0 \text{ .} \quad (9.2)$$

В соответствии с определением устойчивости САР по А.М. Ляпунову, САР будет устойчивой, если при $t \to \infty$ свободная составляющая $y_{св}(t)$ будет стремиться к нулю. Решение уравнения (9.2) определяется корнями характеристического уравнения, которое получают из уравнения (9.1), приравнивая операторный полином $a(p)$ нулю, т.е. уравнением

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p^1 + a_0 = 0, \qquad (9.3)$$

в котором p означает уже не символ дифференцирования, а некоторое комплексное число.

Корни характеристического уравнения (9.3) могут быть вещественными, в том числе кратными, нулевыми, комплексными и мнимыми.

Если корни уравнения (9.3) вещественные и различные, то решение уравнения (9.2) будет иметь вид

$$y_{св}(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{p_i t}, \qquad (9.4)$$

где n – порядок характеристического уравнения;

p_i – корни характеристического уравнения;

A_i – постоянные интегрирования.

При вещественных корнях характеристического уравнения $p_i = \alpha_i$ уравнение (9.4) будет иметь вид

$$y_{св}(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + ... + A_n e^{p_n t}. \qquad (9.5)$$

Очевидно, что для устойчивой работы системы необходимо и достаточно, чтобы все слагаемые уравнения (9.5) с течением времени стремились к нулю. Это возможно, если все корни характеристического уравнения системы отрицательные. Наличие хотя бы одного положительного корня будет свидетельствовать о неустойчивости системы, т.к. тогда соответствующее слагаемое в уравнении (9.5) с течением времени будет возрастать.

Если среди корней характеристического уравнения системы будут вещественные кратные корни, то в уравнении (9.5) появятся составляющие вида

$$(B_1 + B_2 t + ... + B_k t^{k-1}) \cdot e^{p_i t},$$

где B_i – постоянные интегрирования;

k – кратность корня.

Если кратный корень вещественный отрицательный, или комплексный с отрицательной вещественной частью, то множитель e^{pit} будет с течением времени убывать, а множитель в скобках неограниченно возрастать, т.е. появляется неопределенность типа $\infty\cdot 0$. Но поскольку при отрицательных корнях множитель e^{pit} убывает быстрее множителя в скобках, то эта группа слагаемых при отрицательных корнях с течением времени будет стремиться к нулю.

Если среди корней характеристического уравнения имеются комплексные сопряженные вида $p_{i,i+1} = \alpha_i \pm j\omega_i$, то в уравнении (9.5) появятся составляющие вида

$$C_i e^{\alpha_i t} \cdot \sin(\omega_i^t + \varphi_i),$$

где C_i, φ_i – новые постоянные.

В этом случае в системе возникают колебания выходной величины. Эти колебания будут затухающими только в том случае, если вещественная часть корней α_i отрицательная. В противном случае система будет неустойчивой, т.к. амплитуда колебаний выходной величины с течением времени будет возрастать.

При наличии нулевых корней характеристического уравнения, в уравнении (9.5) появятся составляющие вида A_i и в системе установится произвольное отклонение выходной переменной от установившегося значения. Система будет нейтрально устойчивой.

Если среди корней характеристического уравнения будут мнимые $p_{i,i+1} = \pm j\omega_i$, то в уравнении (9.5) появятся составляющие вида $A_i \cdot \sin(\omega_i t + \varphi_i)$ и выходная переменная системы будет совершать незатухающие гармонические колебания с постоянной амплитудой. Система будет находиться на границе устойчивости.

Корни характеристического уравнения наглядно можно представить на комплексной плоскости (рисунок 9.2), если в качестве ее осей принять корни α и ω характеристического уравнения (плоскость корней p).

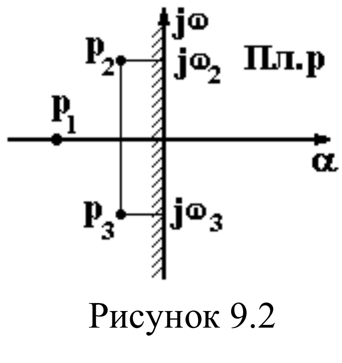

Рисунок 9.2

Рассматривая расположение корней на комплексной плоскости, можно отметить, что САР устойчива, если все корни характеристического уравнения замкнутой системы лежат в левой полуплоскости, левее мнимой оси, т.е. если все они вещественные отрицательные или комплексные с отрицательной вещественной частью. Мнимая ось в плоскости корней характеристического уравнения является границей устойчивости, которую принято отмечать штриховкой, направленной в сторону устойчивой зоны.

Таким образом, для определения устойчивости САР необходимо решить характеристическое уравнение замкнутой системы и проанализировать расположение ее корней на комплексной плоскости.

Решение характеристических уравнений высоких степеней вызывает определенные трудности. Поэтому желательно определять устойчивость системы не решая ее характеристического уравнения. Это можно сделать по значениям коэффициентов дифференциального уравнения или по виду частотных характеристик системы с помощью так называемых критериев устойчивости. Рассмотрим без доказательства некоторые из них.

Критерий устойчивости Гурвица

Критерий Гурвица формулируется следующим образом.

САР устойчива, если все коэффициенты однородного дифференциального уравнения замкнутой системы положительные, а определители Гурвица больше нуля.

Для рассмотрения критерия воспользуемся общей формой записи характеристического полинома замкнутой системы.

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p^1 + a_0 = 0.$$

Из коэффициентов этого уравнения составляют главный определитель Гурвица Δ_n, представляющий собой квадратную матрицу, содержащую n строк и n столбцов. Для этого по диагонали от левого верхнего до правого нижнего угла выписывают все коэффициенты по порядку от n-1 до a_0. Каждый столбец дополняют коэффициентами с последовательно возрастающими индексами сверху вниз. В случае отсутствия коэффициента на его месте пишут ноль. Определители Гурвица получают последовательным отчеркиванием на матрице строк и столбцов.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & ... & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & ... & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & a_n \end{vmatrix}.$$

Условию устойчивости соответствуют следующие неравенства:

$$\Delta_1 = a_{n-1} > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} > 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} > 0.$$

Последний определитель включает всю матрицу, но он может быть выражен через предпоследний определитель Гурвица уравнением $\Delta_n = a_0 \Delta_{n-1} > 0$. В устойчивой системе предпоследний определитель тоже должен быть положительным. Поэтому положительность последнего определителя можно и не определять, если свободный член характеристического уравнения $a_0 > 0$. В свою очередь, если главный определитель Гурвица $\Delta_n = a_0 \Delta_{n-1}$ равен нулю, то система находится на границе устойчивости. Это возможно, если $a_0 = 0$ (один из корней характеристического уравнения равен нулю), или $\Delta_{n-1} = 0$ (два корня характеристического уравнения мнимые). Это условие позволяет использовать критерий Гурвица для определения предельных (критических) значений отдельных параметров системы, при которых она будет находиться на границе устойчивости.

Критерий устойчивости Михайлова

Запишем выходной характеристический полином замкнутой САР следующим образом

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p^1 + a_0.$$

Подставим в этот полином $p = j\omega$, где ω - угловая частота колебаний. Тогда получим характеристический комплекс, называемый вектором Михайлова.

$$D(j\omega) = a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \ldots + a_1 (j\omega)^1 + a_0 = P(\omega) + jQ(\omega),$$

где

$$P(\omega) = a_0 - a_2 \omega^2 + a_4 \omega^4 + \ldots$$

$$Q(\omega) = a_1 - a_3 \omega^3 + a_5 \omega^5 + \ldots$$

называют соответственно вещественной и мнимой функциями Михайлова. Если изменять частоту ω от нуля до бесконечности, то вектор $D(j\omega)$ будет изменяться по величине и направлению, описывая своим концом на комплексной плоскости кривую, называемую годографом Михайлова. Критерий Михайлова формулируется следующим образом.

САР устойчива, если годограф Михайлова при $\omega = 0$ начинается на вещественной положительной полуоси и с увеличением частоты проходит в положительном направлении против часовой стрелки последовательно n квадрантов, нигде не обращаясь в ноль, где *n* – порядок дифференциального уравнения или степень характеристического полинома. Любое отклонение от этого правила говорит о неустойчивости системы. Для системы, находящейся на границе устойчивости, годограф Михайлова проходит через ноль. На рисунке 9.3 показаны годографы Михайлова для устойчивых систем соответствующего порядка.

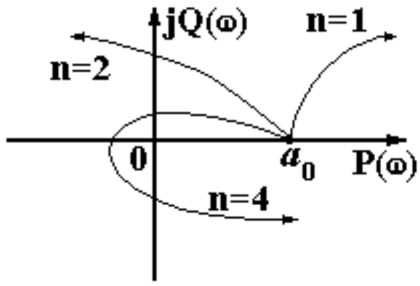

Рисунок 9.3